Шифр: 9-02

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2019/2020
Ленинградская область

Район Киришский

Школа МОУ „Киришский лицей"

Класс 9

ФИО Малов Дмитрий Сергеевич

Чистовик

1	2	3	4	5	Σ
7	0	7	0	0	14

№3.

Раскрасим доску 8x8 в шахматную раскраску. Тогда есть 32 белых и 32 чёрных клетки. Каждым ходом Дима накрывает 2 соседние клетки, то есть 1 белую и 1 чёрную. Тогда за 16 ходов ~~дд~~ Дима накрое 16 белых и 16 чёрных клеток.

Рассмотрим выигрышную стратегию Коли. Каждым ходом Коля ставит крестик в клетку белого цвета. Тогда за 16 ходов Коля поставит крестики в 16 белых клеток, при этом на чёрных клетках не будет ни одного крестика. Тогда после 16 ходов доска будет выглядеть так: 16 белых и 16 чёрных клеток накрыты прямоугольниками, на оставшихся 16 белых стоят 16 крестиков, оставшиеся 16 черных пустые. Тогда Дима не может никуда поставить прямоугольник так, чтобы сумма крестиков была чётна. (Дима накрывает чёрную и белую клетку, сумма будет 1).

Ответ: выигрышная стратегия есть у Коли.

N1.

Могло. Пусть в 1-й кучке 1 конфета, во 2-й 2, и т.д.; в 10-й – 10. Тогда действия такие: из кучек с 1-й и 9-ю конфетами получим 2 кучки по 5 конфет:

1) 1-я минута: 1; 9 → 1; 2; 7.
2) 2-я минута: 1; 2; 7 → 2; 8.
3) 3-я минута 2; 8 → 2; 3; 5
4) 4-я минута ~~4; 3; 7~~ 2; 3; 5 → 3; 7.
5) 5-я минута 3; 7 → 3; 4; 3
6) 6-я минута 3; 4; 3 → 4; 6.
7) 7-я минута: 4; 6 → 4; 5; 1.
8) 8-я минута: 4; 5; 1 → 5; 5.

1; 2; 3 … 9 – кол-во конфет в кучках

Из кучек 1 и 9 при помощи таких действий получили 2 кучки по 5.
Для кучек 2 и 8 используем действия с 3-го по 8-е и получаем 2 кучки по 5
~~#~~. Для кучек 3 и 7: действия 5 – 8; для кучек 4 и 6: действия 7 – 8.
Последнее действие: 10 → 5; 5.
Получили 11 кучек по 5 конфет в каждой.

Ответ: могло.

Чистовик

№2.

$\exists$ a_1 - наим. число; a_n - наиб. число. Тогда.

$a_n \geq a_1 + (n-1)\cdot 10$

$a_{n-1} \geq a_1 + (n-2)\cdot 10$

$a_{n-2} \geq a_1 + (n-3)\cdot 10$

~~Известно что~~

$\cancel{a_n^2 + a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2 < 3\cdot 10^6}$, ~~тогда~~

$\cancel{(a_1+(n-1)\cdot 10)^2 + (a_1+(n-2)\cdot 10)^2 + (a_1+(n-3)\cdot 10)^2 < 3\cdot 10^6}$

$\cancel{a_1^2 + 20a_1(n-1) + 100(n-1)^2 + a_1^2 + 20(n-2)a_1 + 100(n-2)^2 + a_1^2 + 20a_1(n-3) + 100(n-3)^2 < 3\cdot 10^6}$

$\cancel{3a_1^2}$

$a_{n-1} \leq a_n - 10$

$a_{n-2} \leq a_n - 20.$

$a_n^2 + a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2 \leq a_n^2 + (a_n-10)^2 + (a_n-20)^2 = 3a_n^2 - 60a_n + 500 < 3\cdot 10^6.$

$a_n \geq a_1 + (n-1)\cdot 10$, причём равенство только если все отличаются ровно на 10.

1) $\exists$ $n \geq 202.$

Тогда

$a_{202} \geq a_1 + 2010$

Заметим, что если $a_{202} \geq 10^3+10$ и $a_{201} = a_{202}-10$; $a_{200} = a_{202}-20$, то нер-во $a_{202}^2 + a_{201}^2 + a_{200}^2 < 3\cdot 10^6$ не выполняется.

Если $a_{202} = 10^3+10$, $a_{201} = 10^3$; $a_{200} < 10^3-10$, то

$a_1 < 10^3 - 10 - 199\cdot 10 = 10^3 - 2\cdot 10^3 = -10^3$

получим

$\underbrace{-10^3-10 < a_1 < -10^3}$

аналогично с $a_n = 10^3+10$

Условия $a_1 > -10^3-10$ и $a_n < 10^3+10$ не могут выполняться одновременно при $n \geq 202$. $\Rightarrow n \leq 201.$

Покажем, что n может быть равно 201.

$a_1 = -10^3$; $a_2 = -10^3+10$ .... $a_{101} = 0$; $a_{102} = 10$ ... $a_{201} = 10^3.$

Ответ: наибольшее n равно 201.

Шифр: 2-9-23

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2019/2020
Ленинградская область

Район Киришский

Школа МОУ „Киришский лицей"

Класс 9

ФИО Малов Дмитрий Сергеевич

Чистовик.

№ 7

Изначально было ~~[illegible]~~ 1011 хамелеонов зелёного цвета. Тогда рассмотрим первого отвечающего на вопрос зелёного хамелеона. Его ответ ≥ 1011. Также каждый следующий хамелеон не может назвать число которое уже было, и не может назвать число < 1011 (т.к. тогда это была бы ложь). Значит все следующие зелёные хамелеоны называли число, большее чем 1011. Но таких чисел X: $1011 < X \leq 2019$ меньше 1010, а оставшихся ~~[illegible]~~ зелёных хамелеонов 1010. Значит кто-то из них не сможет сказать правду $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ зелёных хамелеонов изначально не больше 1010. Покажем, что может быть 1010.

1-й (зелёный): 1010 верно.
2-й (коричн): 1 неверно
3-й (зелёный): 1011 верно
4-й (коричн): 2 неверно

...

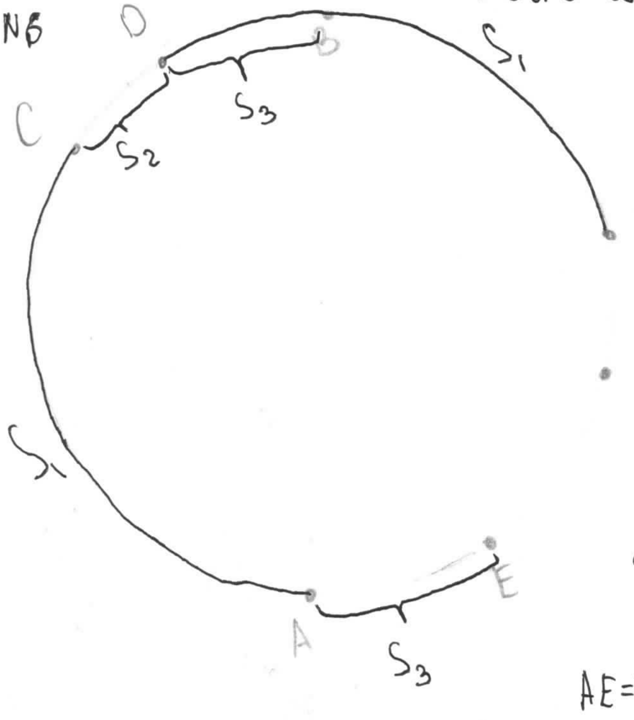
k-й ($k \vdots 2$) (коричн): $\frac{k}{2}$ неверно.
k+1-й (зелёный) $1010 + \frac{k}{2}$ верно.

...

2018-й (коричн): 1009, неверно
2019-й (зеленый): 2019, верно.

Ответ: максимально могло быть 1010 зелёных хамелеонов изначально.

№ 6



$v_м = 1{,}02\, v_п$

1) Сначала Миша бежит половину круга.
$AB = \frac{1}{2} l$ (l – длина круга).
За это время Петя пробегает $AC = S_1$

2) Миша разворачивается и бежит в обратную сторону. до точки встречи встречи D Миша пробегает S_3, а Петя: S_2, причём $S_3 > S_2$, т.к $t_м = t_п$, а $v_м > v_п$.

3) Миша в том же направлении пробегает половину круга, оказывается в точке E. Тогда
$AE = DE - AD = DE - (AB - BD) = DE - AB + BD = \frac{1}{2}l - \frac{1}{2}l + S_3 = S_3$.

За это время Петя пробежал столько же, что и в ~~[illegible]~~ первый раз, т.е. S_1 и оказался в точке F, причём $AF > AE$, так как: $AB = S_1 + S_2 + S_3$; $BE = AB - S_3 = S_1 + S_2$; $BF = DF - DB = S_1 - S_2$, т.е. $BF < BE$, значит $AF = AE + EF > AE$

Чистовик
~~КР №~~

2-9-23

№6 прод.

4) Миша и Петя двигаются в том же направлении до встречи в точке G, причём $EG > FG$. После этого Пете осталось пробежать AG, он сделает это за время $t_1 = \frac{AG}{v_п}$; Миша может пробежать AG за $t_2 = \frac{AG}{1{,}02 v_п} < t_1$.

Тогда Миша продолжает бежать от G в сторону F время $t_3 = \frac{t_1 - t_2}{2}$, после чего разворачивается, бежит до G такое же время $t_3 = \frac{t_1 - t_2}{2}$, после чего начинает догонять Петю и догоняет его в точке A. Получим, что Миша пересёкся с Петей 3 раза: в точке D, в точке G и в точке A на финише, что и нужно было.

№9

Многоугольник может оказаться хорошим если

1) в него войдут 2 ∥ стороны исходного многоуг.

Это невозможно, т.к. тогда должно выполняться равенство:

$$\frac{180^\circ \cdot (n-2)}{n} \cdot l = k \cdot 180, \text{ где } l, k \in \mathbb{N};\ l < n.\ ;\ n \not\vdots 2.$$

$$\frac{(n-2)}{n} l = k$$

$n \not\vdots 2$; $\Rightarrow$ НОД $(n-2; n) = 1$; тогда т.к. $k \in \mathbb{N}$, то $l \vdots n$, но $l < n$, противоречие

2) в него войдут ∥ сторона и диагональ.

3) в него войдут 2 ∥ диагонали.

~~2) диагональ в n-угольнике $n \not\vdots 2$~~

Ответ: не может.

№8.

при S совпадает с A $\angle ABC = 90^\circ$; при S совпадает с B $\angle ABC = 60^\circ$,

тогда $\angle ABC \in (60^\circ; 90^\circ)$

Ответ: от 60° до 90° невключительно.